

受験記号番号			

受験記号番号			

注意

1. 受験記号番号の欄(2か所)には、受験票と同じ受験記号番号を正しく記入すること。
2. 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

R3 前期文系等
数学①

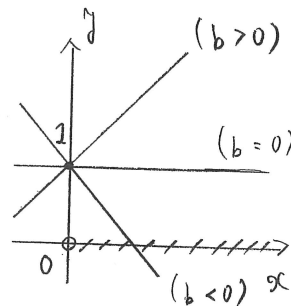
1

(ここには ① の解答を記入すること。)

$f(x) = ax^2 + bx + 1$ とする。

(i) $a = 0$ のとき、

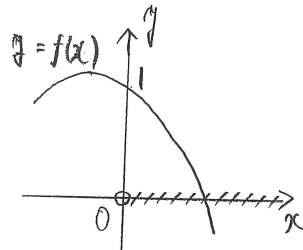
$y = f(x) = bx + 1$ は傾き b , y 切片 $f(0) = 1 (> 0)$ の直線である。これが x 軸の正の部分と共有点をもたないための条件は、 $b \geq 0$



(ii) $a \neq 0$ のとき、

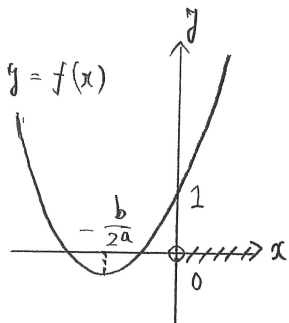
$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1$$

$f(0) = 1 (> 0)$ より、 $a < 0$ ならば曲線 $y = f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもたないから、不適。

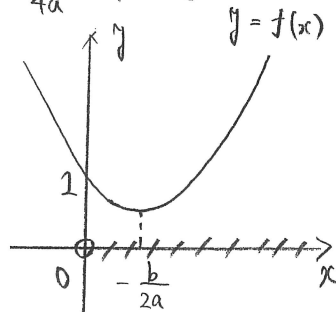


よて、 $a > 0$ が必ずであり、曲線 $y = f(x)$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないための条件は、次の ① または ② が成り立つことである。

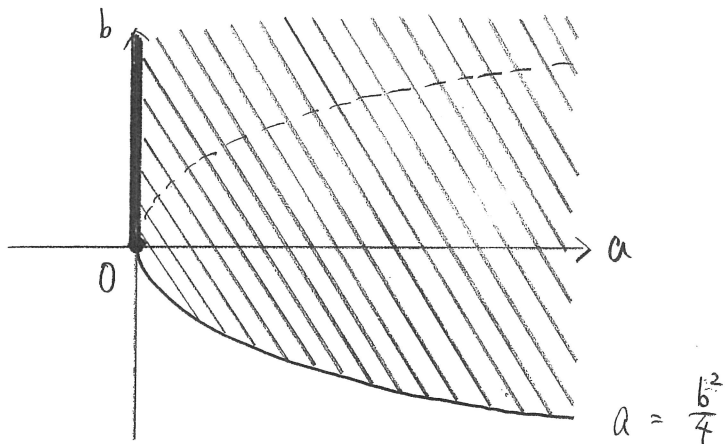
① $-\frac{b}{2a} \leq 0$
 $a > 0$ より、
 $b \geq 0$



② $-\frac{b}{2a} > 0$ かつ $-\frac{b^2}{4a} + 1 > 0$
 $a > 0$ より、
 $b < 0$ かつ $a > \frac{b^2}{4}$



(i), (ii) より、点 (a, b) の領域は下図、斜線部分である。境界は、 $a = 0$ かつ $b \geq 0$ の部分は含み、 $a = \frac{b^2}{4}$ ($b < 0$) の部分は除く。



① 採点欄

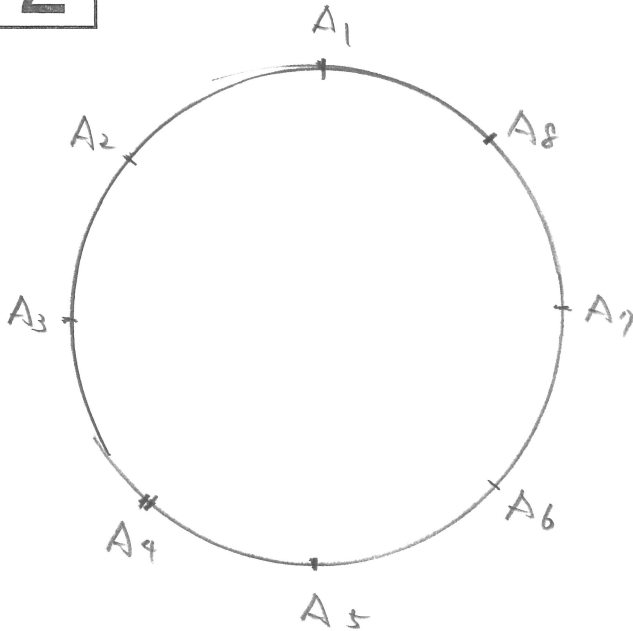
① 採点欄

この欄には記入しないこと

注意 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

2

(ここには 2 の解答を記入すること。)



図のように円周を 8 等分し点を A_1, A_2, \dots, A_8 とする。

(1) 直角三角形ができるので、1つの辺が円の直径と一致する。
直径は全部で 4 本あり、それぞれ直径に対して、残りの頂点の選び方が 6 通りあるので、

$$4 \times 6 = 24 \text{ コ} \dots \text{ [答]}$$

(2) 二等辺三角形は、1つの頂点 $A_i (i=1, 2, \dots, 8)$ に対して等辺の隣り方が 3 通りあるので $8 \times 3 = 24 \text{ コ}$ あり、直角二等辺三角形が 8 コあるので
直角三角形または二等辺三角形は $24 + 24 - 8 = 40 \text{ コ}$

三角形は全部で ${}^8C_3 = 56 \text{ コ}$ より $56 - 40 = 16 \text{ コ} \dots \text{ [答]}$

(3) (1) のように考えると

(I) 対角線が直径であるとき

1つの直径に対して残りの 2 頂点は、直径によって分けられた 2つの弧に1つずつ存在するので、 $3 \times 3 = 9 \text{ 通り}$ より $4 \times 9 = 36 \text{ コ}$

但し、長方形は重複しているので ${}^4C_2 = 6 \text{ コ}$ を除いて $36 - 6 = 30 \text{ コ}$

(II) 対角線以外が直径のとき

1つの直径に対して残りの 2 頂点は、直径によって分けられた 2つの弧の一方に存在するので ${}^3C_2 \times 2 = 6 \text{ 通り}$ より $4 \times 6 = 24 \text{ コ}$

以上 (I)(II) は排反なので $30 + 24 = 54 \text{ コ} \dots \text{ [答]}$

この欄には記入しないこと

2 採点欄

2 採点欄

注意

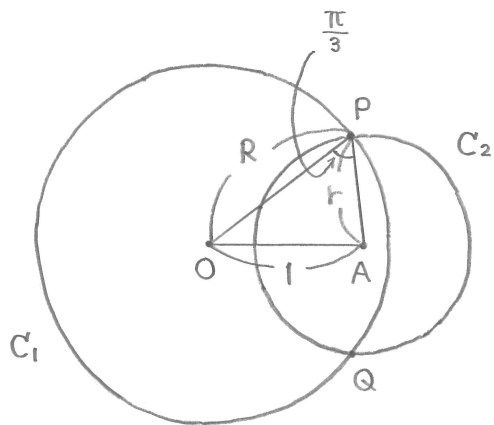
1. 受験記号番号の欄(2か所)には, 受験票と同じ受験記号番号を正しく記入すること。
2. 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

R3 前期文系等
数学②

3

(ここには③の解答を記入すること。)

(1)



C_1 の半径を $R (> 0)$ とする.

$\triangle OPA$ に余弦定理を用いて,

$$1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$R^2 - rR + r^2 - 1 = 0. \dots \textcircled{1}$$

① を R の 2 次方程式とみたとき, 定数項 $r^2 - 1 < 0$ であることより,

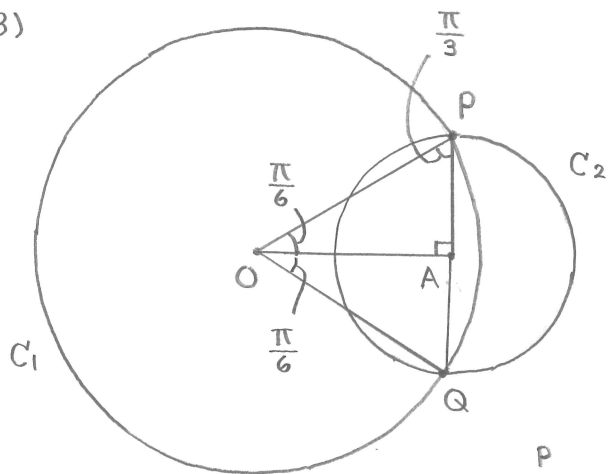
正と負の解を 1 つずつもつ. $R > 0$ より, $R = \frac{r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2}$ [答]

(2) $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, (1) より $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ となる.

このとき, $AP : PO : OA = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから,

$$\angle PAO = \frac{\pi}{2}. \dots \text{[答]}$$

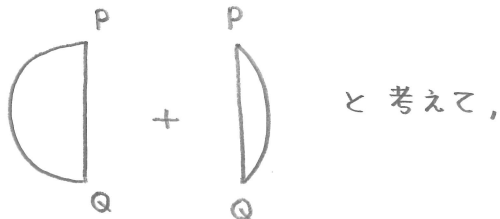
(3)



$$AP = AQ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$OP = OQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

求める面積は,



と考えると,

$$\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sin \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$= \frac{7}{18} \pi - \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots \text{[答]}$$

3 採点欄

3 採点欄

この欄には記入しないこと

注意 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

4

(ここには 4 の解答を記入すること。)

(1) $C_1: y = x^3 + x^2$, $C_2: y = x^2 + 4x + 16$, $f(x) = x^3 + x^2$, C_1 の $x = t$ の点における接線 l とする。

$f'(x) = 3x^2 + 2x$ なので、 l の方程式は

$$y = (3t^2 + 2t)(x - t) + t^3 + t^2 \Leftrightarrow y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \dots \textcircled{1}$$

l と C_2 が接するとき、 x の方程式

$$x^2 + 4x + 16 = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \Leftrightarrow x^2 - (3t^2 + 2t - 4)x + 2t^3 + t^2 + 16 = 0 \dots \textcircled{2}$$

が重解をもつ、このとき、 $(3t^2 + 2t - 4)^2 - 4(2t^3 + t^2 + 16) = 0$ が成り立つ。これより、

$$(t - 2)(t + 2)(9t^2 + 4t + 12) = 0$$

$$9t^2 + 4t + 12 = 9\left(t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{104}{9} \quad \text{に注意すると、この方程式の実数解は } t = 2, -2.$$

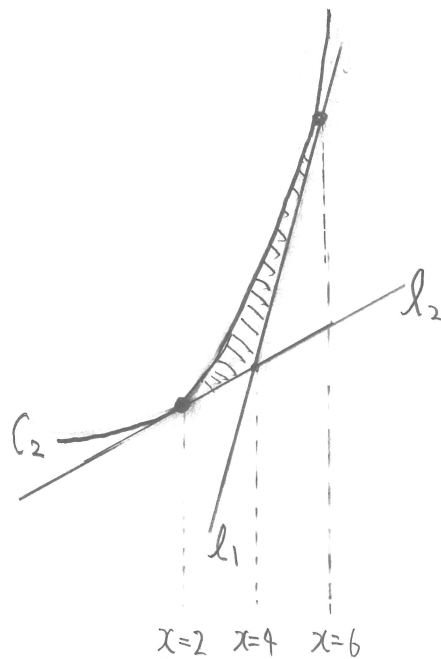
$t = 2$ のときの $\textcircled{1}$ は $y = 16x - 20$, $t = -2$ のときの $\textcircled{1}$ は $y = 8x + 12$ なので、求める2本の直線の方程式は $y = 16x - 20$, $y = 8x + 12$... [答]

(2) $l_1: y = 16x - 20$, $l_2: y = 8x + 12$ とする。

$t = 2$ のときの $\textcircled{2}$ が $x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0$ なので、 l_1 と C_2 の接点の x 座標は 6

$t = -2$ のときの $\textcircled{2}$ が $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$ なので、 l_2 と C_2 の接点の x 座標は 2

また、 $16x - 20 = 8x + 12$ の解が $x = 4$ なので、 l_1 と l_2 の交点の x 座標は 4。



面積を求めるのは左図の斜線部分。この面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_2^4 \{(x^2 + 4x + 16) - (8x + 12)\} dx + \int_4^6 \{(x^2 + 4x + 16) - (16x - 20)\} dx \\ &= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^6 (x - 6)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_2^4 + \left[\frac{1}{3}(x - 6)^3 \right]_4^6 \\ &= \frac{16}{3} \dots \text{[答]} \end{aligned}$$

この欄には記入しないこと

4 採点欄

4 採点欄