見本

表 R3 前期理系 数学解答用紙 Ⅰ

受験記号番号				

注意
1. 受験記号番号の欄（２か所）には，受験票と同じ受験記号番号を正しく記入すること。
2. 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

受験記号番号				

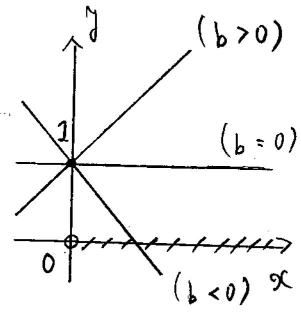
R３ 前期理系
数学Ⅰ

1 （ここには 1 の解答を記入すること。）

$f(x) = ax^2 + bx + 1$ とする。

(i) $a = 0$ のとき，

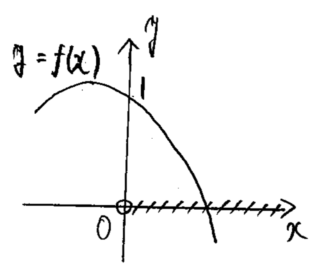
$y = f(x) = bx + 1$ は傾き b，y切片 $f(0) = 1\ (>0)$ の直線である。これが x軸の正の部分と共有点をもたないための条件は，$b \geqq 0$



(ii) $a \neq 0$ のとき，

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1$

$f(0) = 1\ (>0)$ より、$a < 0$ ならば曲線 $y = f(x)$ は x軸の正の部分と共有点をもつから，不適。

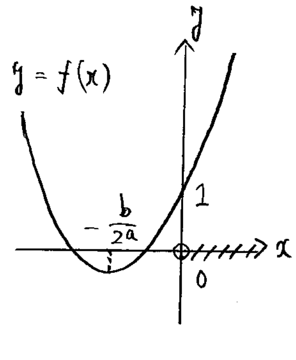


よって，$a > 0$ が必要であり，曲線 $y = f(x)$ が x軸の正の部分と共有点をもたないための条件は，次の①または②が成り立つことである。

① $-\frac{b}{2a} \leqq 0$

$a > 0$ より，

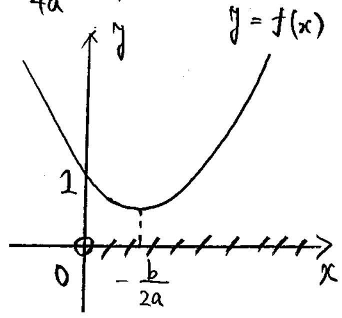
$b \geqq 0$



② $-\frac{b}{2a} > 0$ かつ $-\frac{b^2}{4a} + 1 > 0$

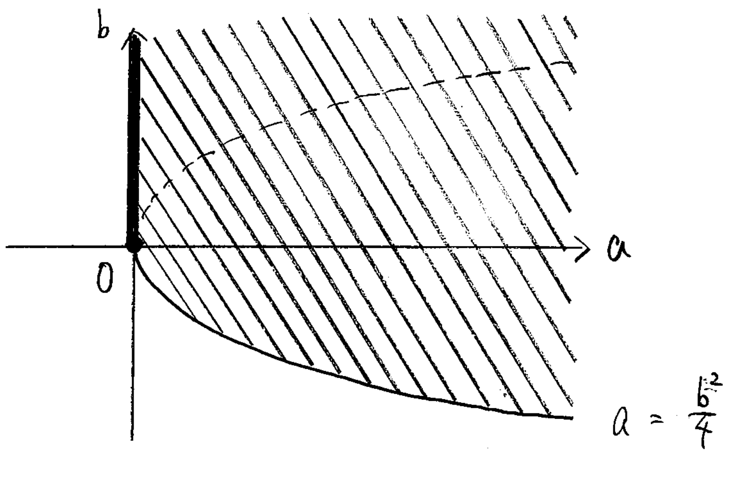
$a > 0$ より，

$b < 0$ かつ $a > \frac{b^2}{4}$



(i)，(ii) より，点 (a, b) の領域は下図の斜線部分である。

境界は，$a = 0$ かつ $b \geqq 0$ の部分は含み，$a = \frac{b^2}{4}$ $(b < 0)$ の部分は除く。



1 採点欄

1 採点欄

この欄には記入しないこと

R3 前期理系
数学Ⓘ

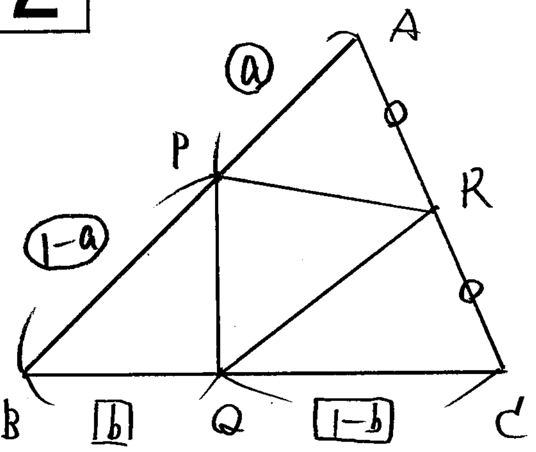
注意　解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

裏（うら）

この欄には記入しないこと

2

（ここには 2 の解答を記入すること。）



(1) △ABCと△APRで∠Aが共通なので
△APRの面積は
$S\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}aS$ と表される。
同様にして
△BPQ、△CQRは
$(1-a)bS,\ \frac{1}{2}(1-b)S$ より
$T=S-\frac{1}{2}aS-(1-a)bS-\frac{1}{2}(1-b)S$

$\therefore \frac{T}{S}=ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$ …… [答]

(2) $\frac{T}{S}=f(a,b)$ とする。まずbを固定して
$f(a,b)=(b-\frac{1}{2})a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$ として $b-\frac{1}{2}<0$ なので

$f(\frac{1}{2},b)<f(a,b)<f(0,b)$ $(\because 0<a<\frac{1}{2})$

$\iff \frac{1}{4}<f(a,b)<-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$

$0<b<\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{4}<\frac{T}{S}=f(a,b)<\frac{1}{2}$ ---- [答]

(3) (2)より $2<\frac{S}{T}<4$ なので整数であることより $\frac{S}{T}=3$

$$\frac{S}{T}=\frac{1}{ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{pq}-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}=\frac{2pq}{pq-p-q+2}$$

なので $2pq=3(pq-p-q+2)$

$\iff (p-3)(q-3)=3$

$p-3\geqq 0,\ q-3\geqq 0$ より $(p-3,q-3)=(1,3)(3,1)$

$\therefore (p,q)=(4,6)(6,4)$ …… [答]

2 採点欄

2 採点欄

見本

おもて 表 R3 前期理系 数学解答用紙 Ⅱ

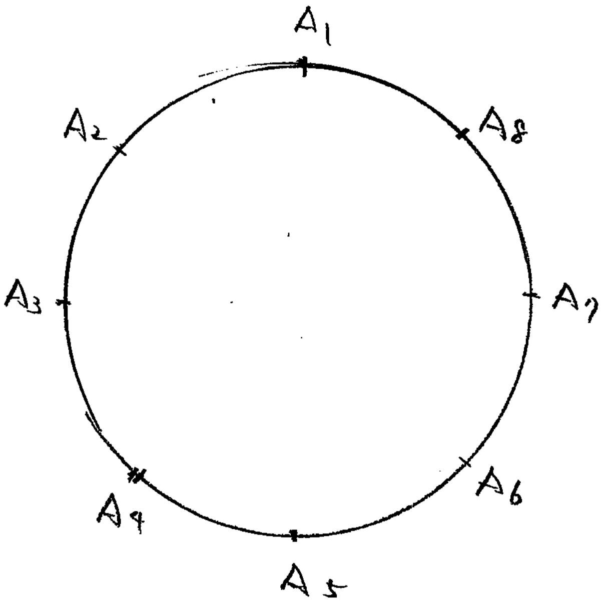
受験記号番号

受験記号番号

注意
1. 受験記号番号の欄（2か所）には，受験票と同じ受験記号番号を正しく記入すること。
2. 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

R3 前期理系
数学Ⅱ

3 （ここには3の解答を記入すること。）



図のように円周を8等分した点を
A_1, A_2 ---- A_8 とする。

(1) 直角三角形ができるので、1つの辺が円の直径と一致する。
直径は全部で4本あり、それぞれの直径に対して、残りの頂点の選び方が6通りあるので、

$4\times6=24$コ ---- [答]

(2) 二等辺三角形は、1つの頂点A_i $(i=1,2,\cdots,8)$に対して等辺の選び方が3通りあるので $8\times3=24$コある。直角二等辺三角形が8コあるので
直角三角形または二等辺三角形は $24+24-8=40$コ
三角形は全部で ${}_8C_3=56$コより $56-40=16$コ ---- [答]

(3) (1)のように考えると

(Ⅰ) 対角線が直径であるとき
1つの直径に対して残りの2頂点は，直径によって分けられた2つの弧に1つずつ存在するので、 $3\times3=9$通り よって $4\times9=36$コ
但し、長方形は重複しているので ${}_4C_2=6$コを除いて $36-6=30$コ

(Ⅱ) 対角線以外が直径のとき
1つの直径に対して残りの2頂点は、直径によって分けられた2つの弧の一方に存在するので ${}_3C_2\times2=6$通り よって $4\times6=24$コ

以上(Ⅰ)(Ⅱ)は排反なので $30+24=54$コ ---- [答]

3 採点欄

3 採点欄

この欄には記入しないこと

注 意　解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

R３ 前期理系
数学Ⅱ

裏

この欄には記入しないこと

4 （ここには4の解答を記入すること。）

(1) l の方程式を $y=x+k$ とする．

$x^3-2x=x+k \Leftrightarrow x^3-3x-k=0$ …①

は異なる3つの実数解をもち，そのうちで最大のものが $x=a$ であるから，

$a^3-3a-k=0$ …② が成り立つ．

①－② より，$x^3-a^3-3(x-a)=0$．

$\therefore (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$．

PとQのx座標を α,β とすれば，これらは $x^2+ax+a^2-3=0$ の2解であることになるから，$\alpha+\beta=-a$．

よって，Sのx座標は $-\dfrac{a}{2}$．

また，Sのy座標は，

$-\dfrac{a}{2}+k=a^3-\dfrac{7}{2}a$ （②より）．

以上より，$S\left(-\dfrac{a}{2},\ a^3-\dfrac{7}{2}a\right)$．…［答］

(2) $X=-\dfrac{a}{2}$，$Y=a^3-\dfrac{7}{2}a$ より

a を消去することで，$Y=-8X^3+7X$．…③

また，曲線 $y=x^3-2x$ について

$y'=3x^2-2$ であることから，接線の傾きが1となるのは $x=\pm1$ のとき．

$x=1$ における接線は $y=x-2$ であり，このときPのx座標が -2，Q(=R)のx座標が1となるので，Sのx座標の上限は $\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ である．

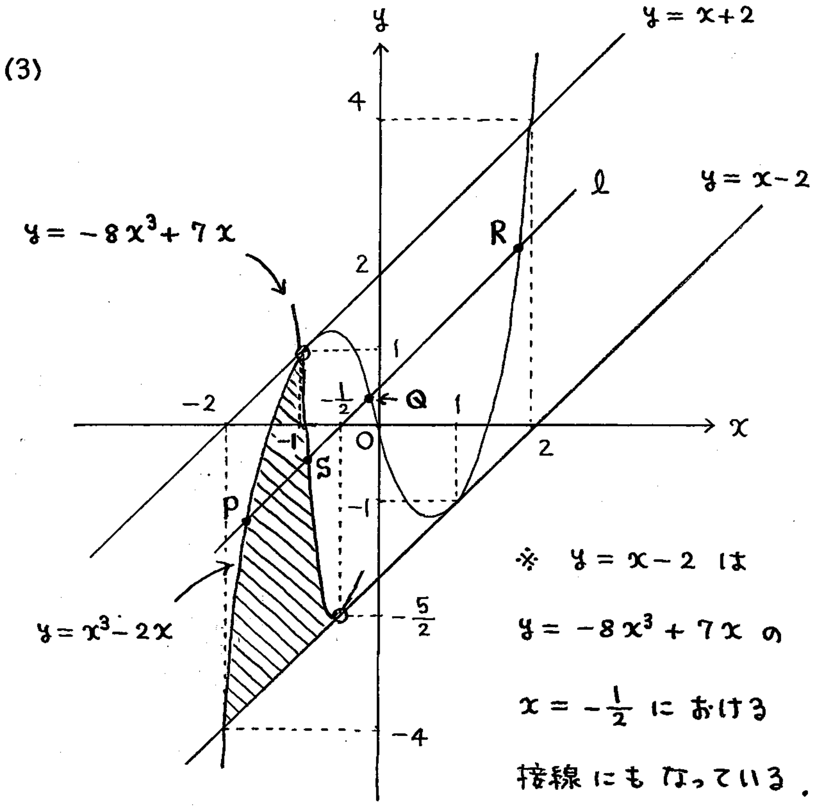
$x=-1$ における接線は $y=x+2$ であり，このときP(=Q)の座標が -1 となるので，Sのx座標の下限は -1 である．

したがって，$-1<X<-\dfrac{1}{2}$．…④

③，④より，Sの軌跡は，

曲線 $y=-8x^3+7x$ の $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ の部分．…［答］

(3)



※ $y=x-2$ は $y=-8x^3+7x$ の $x=-\dfrac{1}{2}$ における接線にもなっている．

求める面積は，

$$\int_{-2}^{-1}\{x^3-2x-(x-2)\}\,dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\{-8x^3+7x-(x-2)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{27}{8}．\quad…［答］$$

4 採点欄

4 採点欄

見本

おもて 表 **R3 前期理系 数学解答用紙 Ⅲ**

受験記号番号

注意
1. 受験記号番号の欄（2か所）には，受験票と同じ受験記号番号を正しく記入すること。
2. 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

5 （ここには 5 の解答を記入すること。）

O, A, B が異なる3点である条件は

$z \neq 0$ かつ $z^2 \neq 0$ かつ $z \neq z^2$

したがって，$z \neq 0$, $z \neq 1$ である。

(1) 3点 O, A, B が同一直線上となる条件は

$\arg \dfrac{z^2-0}{z-0} = (\text{整数}) \times \pi$.

$\arg z = (\text{整数}) \times \pi$.

したがって，求める条件は

z が実数であること。……(答)

(2) 3辺の長さは $|z|, |z^2|, |z^2-z|$ である。

3点 O, A, B が二等辺三角形の頂点となるのは

(i) $|z| = |z^2|$,

(ii) $|z| = |z^2 - z|$,

(iii) $|z^2| = |z^2 - z|$

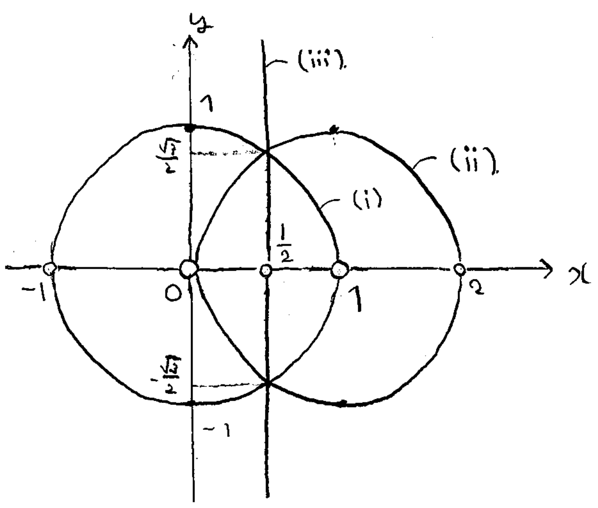
のいずれかのときである。$z \neq 0$ より

(i) は $|z| = 1$,

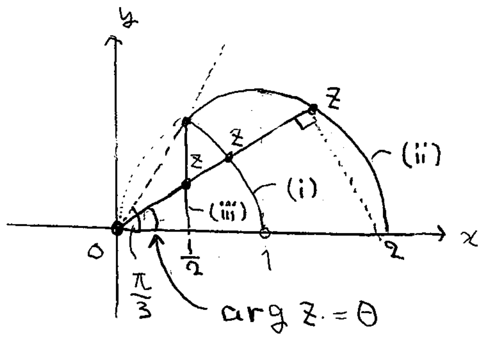
(ii) は $|z-1| = 1$,

(iii) は $|z-0| = |z-1|$

となる。(1) に該当しないように考えて，結果は次。



(3) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ より，(2) の結果のうち次の部分について考える。



$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$

$= \frac{1}{2}|z||z^2| \sin\left(\arg \frac{z^2-0}{z-0}\right)$

$= \frac{1}{2}|z|^3 \sin(\arg z)$.

上図の部分は $\arg z$ が等しく，$|z|$ が異なる3つの部分からなり，$|z|$ が最大なのは (ii) のときである。このとき，図より，$|z| = 2\cos\theta$ であるから

$\triangle OAB = \frac{1}{2}|z|^3 \sin\theta$

$= \frac{1}{2}(2\cos\theta)^3 \sin\theta$

$= 4\cos^3\theta \sin\theta$

ここで，

$f(\theta) = \cos^3\theta \sin\theta$ とおくと，

$f'(\theta) = -3\cos^2\theta \sin^2\theta + \cos^4\theta$

$= \cos^4\theta(1 - 3\tan^2\theta)$

$= \cos^4\theta(1+\sqrt{3}\tan\theta)(1-\sqrt{3}\tan\theta)$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ における増減は次。

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗		↘	

最大値は $\triangle OAB = 4f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ ……(答)

このとき，

$z = 2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ……(答)

5 採点欄

受験記号番号

R3 前期理系
数学Ⅲ

この欄には記入しないこと

5 採点欄

注 意 解答は解答用紙の指定の箇所に記入すること。

うら
裏

R 3 前期理系
数学Ⅲ

この欄には記入しないこと

6

（ここには 6 の解答を記入すること。）

(1) $$F_n(a) = 1 + a + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと,

$$F_{n+1}(a) - F_n(a) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx - \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx$$

$$= \cancel{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}} + \cancel{\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^a} - \cancel{\int_0^a -\frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx} - \cancel{\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx}$$

$$= 0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

および

$$F_1(a) = 1 + a + \int_0^a (a-x)e^x dx$$

$$= 1 + a + \left[(a-x)e^x\right]_0^a - \int_0^a - e^x dx = 1 + a - ae^0 + e^a - 1 = e^a$$

から,

$$e^a = 1 + a + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

[証明おわり]

(2) $0 \leqq x \leqq a$ で $0 \leqq a-x$ ゆえ $\frac{(a-x)^n}{n!}e^0 \leqq \frac{(a-x)^n}{n!}e^x \leqq \frac{(a-x)^n}{n!}e^a$ が成り立つので, 積分して

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}dx \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx \leqq e^a\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}dx$$

$$\therefore \quad \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx \leqq e^a\cdot\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n=1,2,\cdots)$$

[証明おわり]

(3) (1)(2) で $a=1$ として, $n=1,2,\cdots$ に対して

$$\frac{1}{(n+1)!} \underset{(2)}{\leqq} \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}dx \underset{(1)}{=} e - \left(1+1+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \underset{(2)}{\leqq} \frac{e}{(n+1)!} \cdots \circledast$$

が成り立つ。$n!$ は n とともに増加して, $6! = 720$, $7! = 5040$ より, $\left|e - \left(1+1+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right| < 10^{-3}$ であるために $n+1 \geqq 7$ が必要で ($\because \circledast$)

$n+1=7$ のとき $\circledast$ は, $2<e<3$ より,

$$\frac{1}{5040} \leqq \left|e - \left(1+1+\cdots+\frac{1}{6!}\right)\right| \leqq \frac{e}{5040} < \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

となって, 十分でもある。

求めるべき n の最小値は　6 ……[答]

6 採 点 欄

6 採 点 欄