## 1

（ここには 1 の解答を記入すること。）

$l+m+n=K$ …(＊)

（$K$ は 3 より大きな奇数）

$l, m, n$ は正の奇数だから，

$l=2a+1,\ m=2b+1,\ n=2c+1$

（$a, b, c$ は 0 以上の整数）とおけば，

$(*) \iff a+b+c=\dfrac{K-3}{2}$ …(＊＊)

(1) $K=99$ のとき，(＊＊) は

$a+b+c=48$ …①

求める $N$ は，① を満たす 0 以上の整数の組 $(a, b, c)$ の個数に等しく，それは 48 個の ○（ボール）と 2 本の ｜（しきり）を自由な順番に一列に並べる方法の総数と同じであるから，$N={}_{48+2}C_2$

$=1225$ …［答］

(2) ① を満たす 0 以上の整数の組 $(a, b, c)$ で，$a, b, c$ の中に同じ値を 2つ以上含むものの個数を求めればよい．

(ア) $a=b=c$ であるもの

1通り（$a=b=c=16$）

(イ) $a=b\neq c$ であるもの

$a$ の値の決め方が

$0, 1, 2, \cdots, 14, 15,$

$17, 18, 19, \cdots, 23, 24$

の 24通りであり，$a$ を決めれば $b$ と $c$ は一意に決まる．

(ウ) $b=c\neq a$ であるもの

(イ) と同じく，24通り．

(エ) $c=a\neq b$ であるもの

(イ) と同じく，24通り．

以上より，求めるものは

$1+24\times 3=73$（個）…［答］

(3) (1) と同様に考えて，$K>3$ である奇数 $K$ に対し，

$$N={}_{\frac{K-3}{2}+2}C_2=\frac{\frac{K+1}{2}\cdot\frac{K-1}{2}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{K^2-1}{8}$$

よって，

$N>K \iff K^2-1>8K$

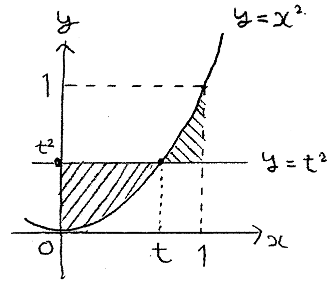
$\iff (K-4)^2>17$

これを満たす最小の $K$ は

$K=9$ …［答］

# 2

(ここには 2 の解答を記入すること。)

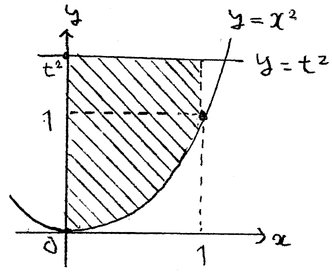



(1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき, $F(t)$ は右図の斜線部の面積を表すので,

$$F(t) = \int_0^t (t^2 - x^2)\,dx + \int_t^1 (x^2 - t^2)\,dx$$

$$= \left[t^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 - t^2 x\right]_t^1$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$




(2) $t \geqq 1$ のとき, $F(t)$ は右図の斜線部の面積を表すので

$$F(t) = \int_0^1 (t^2 - x^2)\,dx$$

$$= \left[t^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= t^2 - \frac{1}{3}$$

(1) と合わせて

$$F(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ t^2 - \frac{1}{3} & (t \geqq 1) \end{cases}$$

となる. $t \geqq 1$ において $F(t)$ は単調増加である。

$0 \leqq t \leqq 1$ においては,

$$F'(t) = 4t^2 - 2t = 4t\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

より次の増減を得る. したがって, $T = \frac{1}{2}$ ……(答)

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(t)$ | $(0)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(t)$ | | ↘ | | ↗ | |

$$F(T) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

**3** (ここには3の解答を記入すること。)

(1) $\ell$ と原点 $(0,0)$ の距離を $d$ とすると，

$$d=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

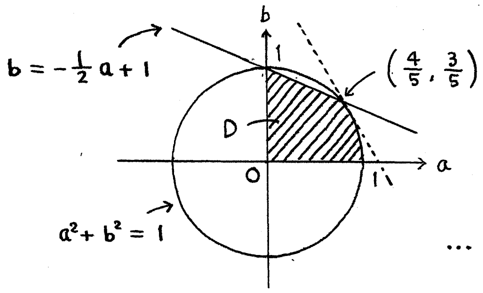
$d\geqq 2$ となる条件は，$a^2+b^2\leqq 1$ …①

$\ell$ と直線 $x=1$ の交点の $y$ 座標は

$y=\dfrac{2-a}{b}$ これが2以上であることと $b>0$ より，$2-a\geqq 2b$

$$b\leqq -\frac{1}{2}a+1 \quad \cdots ②$$

$a>0$，$b>0$ と①，②より，範囲Dは次図の斜線部分である．




… [答]

$a>0$，$b>0$ なので，軸上の点は含まないが，それ以外の境界線は含む．

(2) Dの点 $(a,b)$ について，

$3a+2b=k$ …③ とおく．

変形して，$b=-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{k}{2}$

この方程式が表す $ab$ 平面上の直線を $m$ とし，$m$ とDが共有点をもつような $k$ の最大値を求めればよい．

Dの境界の点 $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ における円 $a^2+b^2=1$ の接線の方程式は

$\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}b=1$ すなわち

$b=-\dfrac{4}{3}a+\dfrac{5}{3}$

これの傾き $\left(-\dfrac{4}{3}\right)$ よりも $m$ の傾き $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ のほうが小さいから，

$m$ の $b$ 切片 $\dfrac{k}{2}$ が最大となるのは $m$ が第1象限において円 $a^2+b^2=1$ と接するときである．

そのときの接点の座標を $(a_0,b_0)$ $(a_0>0,\ b_0>0)$ とおけば，接線の方程式は $a_0a+b_0b=1$ …④

③と④が一致するときを考えればよいから，$\dfrac{b_0}{a_0}=\dfrac{2}{3}$

これと $a_0^2+b_0^2=1$，$a_0>0$，$b_0>0$ より，$a_0=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$b_0=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

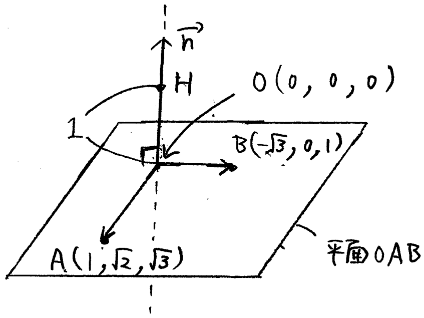
このとき，$k=3a_0+2b_0=\sqrt{13}$

以上より，$3a+2b$ を最大にするのは $a=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$b=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ …[答]

で，最大値は $\sqrt{13}$ …[答]

# 4

(ここには 4 の解答を記入すること。)




(1) 平面 OAB の法線ベクトルを

$\vec{n} = (p, q, r) \quad (\neq \vec{0})$

とおくと，$\vec{OA} \perp \vec{n}$ かつ $\vec{OB} \perp \vec{n}$ より，

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{n} = p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r = 0 \\ \vec{OB} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}p + r = 0 \end{cases} \qquad \therefore\ q = -2\sqrt{2}p,\ r = \sqrt{3}p$$

よって，以下 $\vec{n} = (1, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$ とする。題意より $\vec{OH} /\!/ \vec{n}$ で，H の $x$ 座標は正であり，かつ $|\vec{OH}| = 1$ であるから，

$$\vec{OH} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+8+3}}(1, -2\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

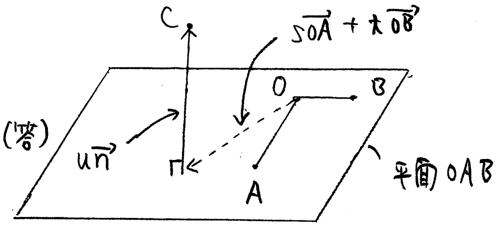
$\therefore\ \mathrm{H}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ ……(答)

(2) 実数 $s, t, u$ を用いて $\vec{OC} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{n}$ とかける。

成分で表すと $(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}) = (s - \sqrt{3}t + u, \sqrt{2}s - 2\sqrt{2}u, \sqrt{3}s + t + \sqrt{3}u)$

となるから，

$$\begin{cases} s - \sqrt{3}t + u = \sqrt{6} \\ \sqrt{2}s - 2\sqrt{2}u = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}s + t + \sqrt{3}u = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \therefore\ s = \frac{\sqrt{6}}{6},\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ u = \frac{\sqrt{6}}{3}$$




平面 OAB と点 C の距離は，

$|u\vec{n}| = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$ ……(答)

(3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \cdot (-\sqrt{3}) + \sqrt{2} \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 1 = 0$ より，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$ であるから，

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2 = \sqrt{6}$$

これと (2) の結果より，

$$(\text{四面体 OABC の体積}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

……(答)