1

(ここには1の解答を記入すること。)

$l+m+n=K$ …(*)

(Kは3より大きな奇数)

l, m, n は正の奇数だから,

$l=2a+1$, $m=2b+1$, $n=2c+1$

(a, b, c は0以上の整数)とおけば,

(*) $\Leftrightarrow$ $a+b+c=\dfrac{K-3}{2}$ …(**)

(1) $K=99$ のとき, (**)は

$a+b+c=48$ …①

求める N は, ①を満たす0以上の整数の組 (a, b, c) の個数に等しく, それは48個の○(ボール)と2本の|(しきり)を自由な順番に一列に並べる方法の総数と同じであるから, $N={}_{48+2}C_2$

$=1225$ …[答]

(2) ①を満たす0以上の整数の組 (a, b, c) で, a, b, c の中に同じ値を2つ以上含むものの個数を求めればよい.

(ア) $a=b=c$ であるもの

1通り ($a=b=c=16$)

(イ) $a=b\neq c$ であるもの

a の値の決め方が

0, 1, 2, …, 14, 15,

17, 18, 19, …, 23, 24

の24通りであり, a を決めれば b と c は一意に決まる.

(ウ) $b=c\neq a$ であるもの

(イ)と同じく, 24通り.

(エ) $c=a\neq b$ であるもの

(イ)と同じく, 24通り.

以上より, 求めるものは

$1+24\times 3=73$ (個) …[答]

(3) (1)と同様に考えて, $K>3$ である奇数 K に対し,

$$N={}_{\frac{K-3}{2}+2}C_2=\frac{\frac{K+1}{2}\cdot\frac{K-1}{2}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{K^2-1}{8}$$

よって,

$N>K \Leftrightarrow K^2-1>8K$

$\Leftrightarrow (K-4)^2>17$

これを満たす最小の K は

$K=9$ …[答]

2

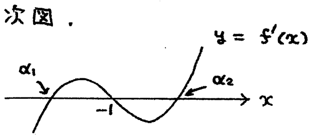
（ここには2の解答を記入すること。）

(1)　$f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ は連続関数であり，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ なので，最小値は必ずもつ．$(x+1)^2 \geqq 0$ であるから，x^2+3x+a の最小値が 0 以上の場合はつねに $f(x) \geqq 0$ であることになって，条件を満たさない．

$x^2+3x+a=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{4}$ は $x=-\frac{3}{2}$ で最小値 $a-\frac{9}{4}$ をとる．$a-\frac{9}{4}<0$ のときは $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(a-\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}<0$ となるから $f(x)$ の最小値も負になる．よって，求める a の値の範囲は　$a<\frac{9}{4}$　…［答］

(2)　$f'(x)=(x+1)(4x^2+11x+2a+3)$ について，$4x^2+11x+2a+3=F(x)$ とおくと，$a<2$ のとき，$F(-1)=2a-4<0$．

よって，$F(x)=0$ は異なる2実解をもち，それらを α_1,α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$ とすれば $\alpha_1<-1<\alpha_2$ だから，$y=f'(x)$ のグラフの概形は次図．



したがって，$f(x)$ の増減は次の通りである．

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-1	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↘	極小	↗

このとき，$f(x)$ は確かに2つの極小値をもち，それらを与えるのが $x=\alpha_1,\alpha_2$ である．

以下，$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ の成立を示す．

$f(x)$ について，$x^2+3x+a=G(x)$ とおけば，

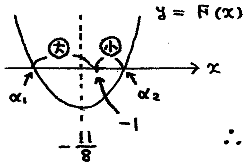
$$f(x)=G(x)\cdot(x+1)^2$$

まず，$G(\alpha_1)=\alpha_1^2+3\alpha_1+a$，$G(\alpha_2)=\alpha_2^2+3\alpha_2+a$ について，

$$G(\alpha_2)-G(\alpha_1)=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2+3)$$
$$=(\alpha_2-\alpha_1)\left(-\frac{11}{4}+3\right)>0$$

であることより，$G(\alpha_1)<G(\alpha_2)$　…①

また，$F(x)=4\left(x+\frac{11}{8}\right)^2+2a-\frac{73}{16}$ より



左図のようであるので，

$$|\alpha_1-(-1)|>|\alpha_2-(-1)|$$

$\therefore\ (\alpha_1+1)^2>(\alpha_2+1)^2$　…②

さらに，$f(\alpha_1)=G(\alpha_1)(\alpha_1+1)^2<0$ より $G(\alpha_1)<0$

$f(\alpha_2)=G(\alpha_2)(\alpha_2+1)^2<0$ より $G(\alpha_2)<0$

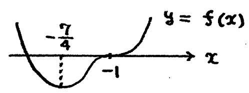
なので，① より　$G(\alpha_1)<G(\alpha_2)<0$　…③

②，③ より，$G(\alpha_1)(\alpha_1+1)^2<G(\alpha_2)(\alpha_2+1)^2$

すなわち，$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$　（証明おわり）

(3)　$a<2$ のときは β として α_1 を採用すれば条件が満たされる．

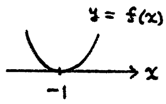
$a=2$ のときは $f'(x)=(x+1)^2(4x+7)$ より，β として $-\frac{7}{4}$ を採用すれば条件が満たされる．



$a>2$ のとき，

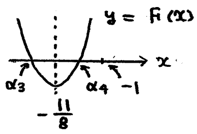
$$f'(x)=(x+1)\left\{4\left(x+\frac{11}{8}\right)^2+2\left(a-\frac{73}{32}\right)\right\}$$

よって，$a \geqq \frac{73}{32}$ ならば β として -1 を採用すれば条件が満たされる．



$2<a<\frac{73}{32}$ の場合，$F(x)=0$ は異なる2解をもち，それらを α_3,α_4 $(\alpha_3<\alpha_4)$ とすると，

$F(-1)=2a-4>0$，$-\frac{11}{8}<-1$ より $\alpha_3<\alpha_4<-1$



x	$\cdots$	α_3	$\cdots$	α_4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	0	↗

このときの $f(x)$ の増減は右上表のようになり，(1) より $2<a \leqq \frac{9}{4}$ なら $f(\alpha_3) \leqq 0$ だから条件を満たし，$\frac{9}{4}<a<\frac{73}{32}$ なら $f(\alpha_3)>0$ だから満たさない．

以上より，　$a \leqq \frac{9}{4}$ または $a \geqq \frac{73}{32}$　…［答］

3 (ここには 3 の解答を記入すること。)

(1) $\dfrac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}-1 \leqq \dfrac{x}{2}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{x}{2+x} \leqq \dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1} \leqq \dfrac{x}{2}$ より　$x>0$ で $2+x \geqq \sqrt{1+x}+1 \geqq 2$ を示す。

$x>0$ より $\sqrt{1+x}+1 > \sqrt{1+0}+1=2$ より右側成立

また $2+x-(\sqrt{1+x}+1)=1+x-\sqrt{1+x}=\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}-1)>0$ より左側成立

以上より成立　[証明終]

(2) (1)より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqq S_n \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n}$$

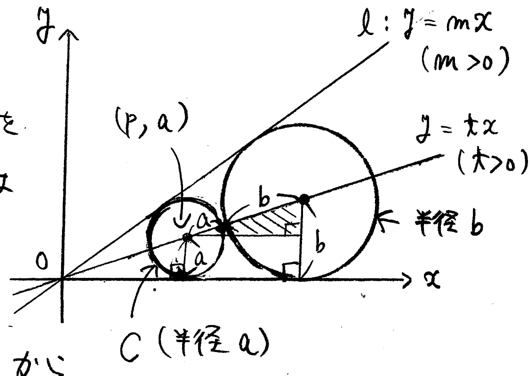
$n\to\infty$ のとき区分求積法により右端 $\to \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{4}$

$$\text{左端} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$$

$$\to \frac{1}{2+0}\times\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{4}$$

以上よりはさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$ ……[答]

4 (ここには4の解答を記入すること。)



(1) 円Cは第1象限にあり，かつ x軸に接するから，中心の座標を (p, a) $(p>0)$ とおける。この点は $l: y = mx$ の下側にあるから，

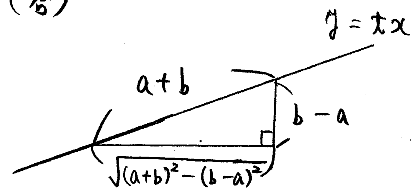
$a < pm$ ……①

C は $l: mx - y = 0$ に接するから，

$\dfrac{|pm-a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = a$ で，① より $\dfrac{pm-a}{\sqrt{m^2+1}} = a$

$\therefore\ p = \dfrac{a}{m}\left(\sqrt{m^2+1}+1\right)$

$\therefore\ t = \dfrac{a}{p} = \underline{\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}+1}}$ ……(答)



(2) 右上図斜線部の直角三角形に注目し，

$$t = \frac{b-a}{\sqrt{(a+b)^2-(b-a)^2}} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$u = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (>0) とおくと，$t = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right)$ より $u^2 - 2tu - 1 = 0$

$u > 0$ より，$u = t + \sqrt{t^2+1}$ (注 $t - \sqrt{t^2+1} < t - \sqrt{t^2+0} = 0$)

$\therefore\ \dfrac{b}{a} = u^2 = \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^2 = \underline{2t^2+1+2t\sqrt{t^2+1}}$ ……(答)

(3) (2) より，

$$\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right) = \frac{1}{m}\cdot 2t\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) = 2\cdot\frac{t}{m}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$$ ……②

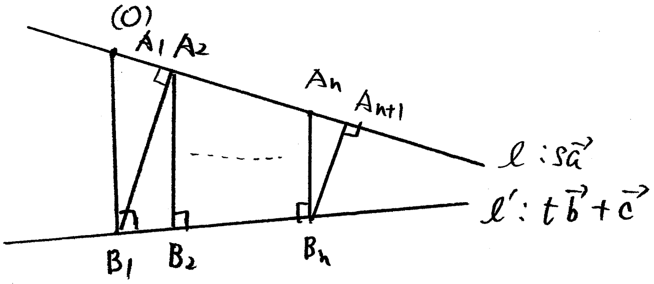
(1) より，$m \to +0$ のとき $t \to +0$ ……③

$\dfrac{t}{m} = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}+1} \xrightarrow{m\to+0} \dfrac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \dfrac{1}{2}$ ……④

②，③，④ より，

$\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(0+\sqrt{0+1}\right) = \underline{1}$ ……(答)

5 (ここには 5 の解答を記入すること。)



(1) $A_nB_n \perp \ell'$ より $\overrightarrow{A_nB_n}\cdot\vec{b}=0$

$\iff (t_n\vec{b}+\vec{c}-s_n\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

$\iff 3t_n-2s_n-1=0$ ——①

$B_nA_{n+1}\perp \ell$ より $\overrightarrow{B_nA_{n+1}}\cdot\vec{a}=0$

$\iff (s_{n+1}\vec{a}-t_n\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$\iff 6s_{n+1}-2t_n-1=0$ ——②

①②より t_n を消去して $s_{n+1}=\frac{2}{9}s_n+\frac{5}{18}$ ……[答]

(2) (1)の漸化式より $s_n=-\frac{5}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}+\frac{5}{14}$ $(s_1=0$ より$)$ なので

$S=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{5}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}+\frac{5}{14}\right\}=\frac{5}{14}$ ……[答]

また①より $t_n=\frac{2s_n+1}{3}$ なので $T=\lim_{n\to\infty}\frac{2s_n+1}{3}=\frac{4}{7}$ ……[答]

(3) $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}-\frac{5}{14}\vec{a}$ なので

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{b}=\frac{4}{7}\cdot 3-1-\frac{5}{14}\cdot 2=0$ となり $AB\perp\ell'$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=\frac{4}{7}\cdot 2+1-\frac{5}{14}\cdot 6=0$ より $AB\perp\ell$

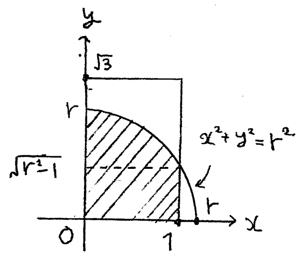
以上より成立 [証明終]

6 (ここには6の解答を記入すること。)

(i) $0<r\leqq 1$ のとき,

求める体積は半径 r の球の上半分の体積なので

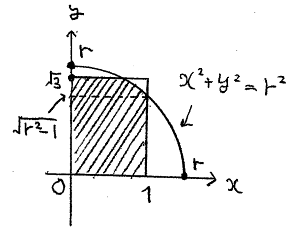
$$V(r)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$$



(ii) $1<r\leqq\sqrt{3}$ のとき

題意の共通部分は右の斜線部を y 軸まわりに回転したものであり

$$\begin{aligned}
V(r)&=1^2\pi\times\sqrt{r^2-1}+\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r}(r^2-y^2)\pi\,dy\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left[r^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{r}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left(\frac{2}{3}r^3-r^2\sqrt{r^2-1}+\frac{1}{3}\sqrt{r^2-1}^{\,3}\right)\\
&=\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{r^2-1}+r^3-r^2\sqrt{r^2-1}\right)
\end{aligned}$$



(iii) $\sqrt{3}<r<2$ のとき

題意の共通部分は右の斜線部を y 軸まわりに回転したものであり

$$\begin{aligned}
V(r)&=1^2\pi\times\sqrt{r^2-1}+\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}(r^2-y^2)\pi\,dy\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left[r^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left(\sqrt{3}r^2-\sqrt{3}-r^2\sqrt{r^2-1}+\frac{1}{3}\sqrt{r^2-1}^{\,3}\right)\\
&=\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{r^2-1}+\sqrt{3}r^2-\sqrt{3}-\frac{2}{3}r^2\sqrt{r^2-1}\right)
\end{aligned}$$

(iv) $r\geqq 2$ のとき

求める体積は半径1の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱の体積なので

$$V(r)=1^2\pi\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$$

以上をまとめて,次の通り。

$$V(r)=\begin{cases}
\frac{2}{3}\pi r^3 & (0<r\leqq 1)\\
\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{r^2-1}+r^3-r^2\sqrt{r^2-1}\right) & (1<r\leqq\sqrt{3})\\
\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{r^2-1}+\sqrt{3}r^2-\sqrt{3}-\frac{2}{3}r^2\sqrt{r^2-1}\right) & (\sqrt{3}<r<2)\\
\sqrt{3}\pi & (r\geqq 2)
\end{cases}$$