1

(ここには 1 の解答を記入すること。)

同色の玉同士も区別して考える。

(1) このゲームが引き分けとなるのは，「白赤白赤白赤白赤白」の順に玉が取り出されるときである。赤玉4個のみの取り出す順序は $4!$ 通り，白玉5個のみの取り出す順序は $5!$ 通りあるから，求める確率は，

$$\frac{4! \times 5!}{9!} = \underline{\frac{1}{126}} \quad \cdots\cdots【答】$$

(2) このゲームにAが勝つような玉の取り出し方と，それが生じる確率は，次の通りである：

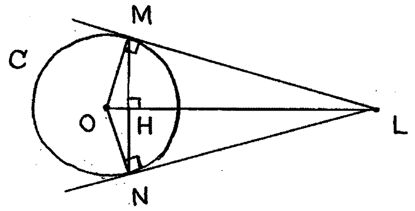
- 「赤」 $\cdots \dfrac{4}{9}$,
- 「白赤赤」 $\cdots \dfrac{{}_4P_2 \times {}_5P_1}{{}_9P_3} = \dfrac{5}{42}$,
- 「白赤白赤赤」 $\cdots \dfrac{{}_4P_3 \times {}_5P_2}{{}_9P_5} = \dfrac{2}{63}$
- 「白赤白赤白赤赤」 $\cdots \dfrac{{}_4P_4 \times {}_5P_3}{{}_9P_7} = \dfrac{1}{126}$

したがって，求める確率は，

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{42} + \frac{2}{63} + \frac{1}{126} = \underline{\frac{38}{63}} \quad \cdots\cdots【答】$$

2

(ここには 2 の解答を記入すること。)



(1) $OM=1$, $OL=4$,

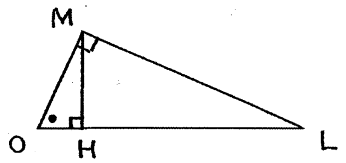
$\angle OML=90^\circ$ より,

$LM=\sqrt{OL^2-OM^2}=\sqrt{15}$.

線分 MN の中点を H とすれば,

$\angle LHM=\angle OHM=90^\circ$

であり,



$\triangle OLM \backsim \triangle OMH$ より,

$OL:LM=OM:MH$.

$4:\sqrt{15}=1:MH$.

よって, $MH=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であり,

$MN=2MH=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

さらに,

$$HL=\sqrt{LM^2-MH^2}$$
$$=\sqrt{15-\frac{15}{16}}=\frac{15}{4}.$$

よって, $\triangle LMN=\dfrac{1}{2}\cdot MN\cdot HL$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{15}{4}$$
$$=\frac{15\sqrt{15}}{16}. \quad \cdots[答]$$

(2) $\triangle LMN$ の内接円の半径 r について,

$$\frac{1}{2}r\,(LM+LN+MN)=\frac{15\sqrt{15}}{16}.$$

$$\frac{1}{2}r\left(\sqrt{15}+\sqrt{15}+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{15\sqrt{15}}{16}.$$

これより, $r=\dfrac{3}{4}$. …[答]

$\angle OML=\angle ONL=90^\circ$ より

四角形 OMLN は直径 OL (=4)

の円に内接しており, それは $\triangle LMN$

の外接円でもある.

よって, $R=2$. …[答]

3

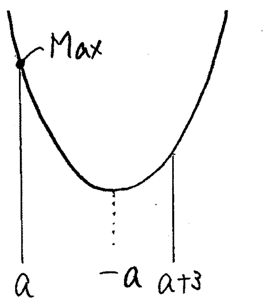
(ここには3の解答を記入すること。)

$f(x) = x^2 + 2ax - 3 = (x+a)^2 - a^2 - 3$

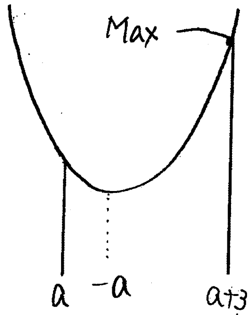
(1) $-a > \dfrac{2a+3}{2}$ 　　 $-a \leqq \dfrac{2a+3}{2}$

$a < -\frac{3}{4}$ のとき 　　 $a \geqq -\frac{3}{4}$ のとき

範囲の中央の値 $\frac{2a+3}{2}$ と軸のx座標の大小で場合分けをする。



$M(a) = f(a)$
$= 3a^2 - 3$



$M(a) = f(a+3)$
$= 3a^2 + 12a + 6$

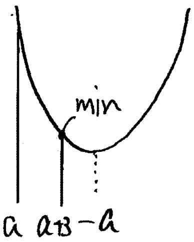
$$M(a) = \begin{cases} 3a^2 - 3 & \left(a < -\frac{3}{4}\right) \\ 3a^2 + 12a + 6 & \left(a \geqq -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

……[答]

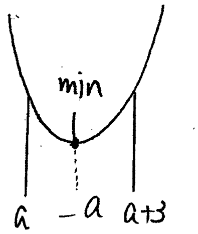
(2) $a+3 < -a$ 　　 $a < -a \leqq a+3$ 　　 $-a \leqq a$

$a < -\frac{3}{2}$ のとき 　　 $-\frac{3}{2} \leqq a < 0$ のとき 　　 $0 \leqq a$ のとき

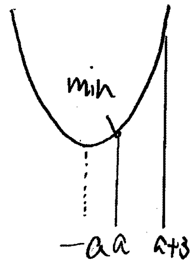
範囲の端の値と軸のx座標の大小で場合分けをする。



$m(a) = f(a+3)$
$= 3a^2 + 12a + 6$



$m(a) = f(-a)$
$= -a^2 - 3$

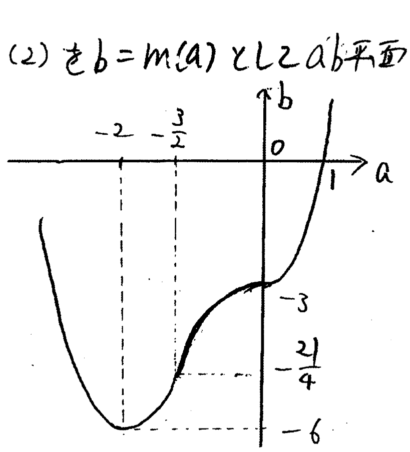


$m(a) = f(a)$
$= 3a^2 - 3$

$m(a)$
$$= \begin{cases} 3a^2 + 12a + 6 & \left(a < -\frac{3}{2}\right) \\ -a^2 - 3 & \left(-\frac{3}{2} \leqq a < 0\right) \\ 3a^2 - 3 & (0 \leqq a) \end{cases}$$

……[答]

(3) (2)を $b = m(a)$ としてab平面に表すと図のようになるので



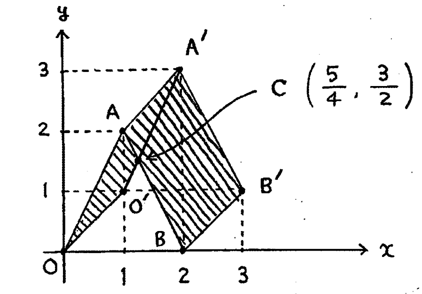
$m(a)$ の最小値は

$a = -2$ のときで -6 ……[答]

4

(ここには4の解答を記入すること。)

(1)



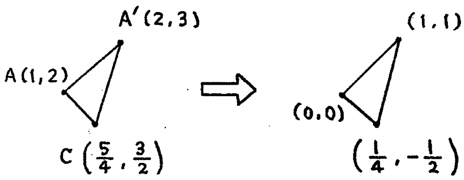
$y = f(x)$ のグラフは図の折れ線 OAB であり，これを x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 だけ平行移動することで，折れ線 O′A′B′ となる．

直線 O′A′ : $y = 2x - 1$ と

直線 AB : $y = -2x + 4$ の交点を C $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$ として，S は図の斜線部分の面積である．

(平行四辺形 OO′A′A の面積) = 1，

(平行四辺形 AA′B′B の面積) = 3，



△AA′C の面積については，上図のように平行移動して考えることで，

$$\frac{1}{2}\left|1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\cdot\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{8}.$$

よって，

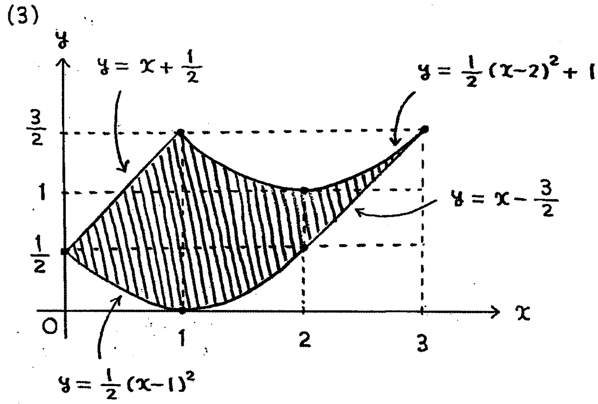
$$S = 1 + 3 - \frac{3}{8}$$
$$= \frac{29}{8}. \quad \cdots [答]$$

(2) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ について $f'(x) = x - 1$．

$f'(x) = 1$ のとき，$x = 2$ であるから，

求めるものは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ における接線であり，その方程式は $y = x - \frac{3}{2}$． … [答]

(3)



$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ のときの S は上図の斜線部分の面積であるけれども，

領域 $\frac{1}{2}(x-1)^2 \leqq y \leqq \frac{1}{2}$ の部分の図形を領域 $\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \leqq y \leqq \frac{3}{2}$ に移し替えて考えれば，底辺の長さ 2，高さ 1 の平行四辺形の面積と同じである．つまり，$S = 2$． … [答]