# 1

(ここには1の解答を記入すること。)

同色の玉同士も区別して考える。

(1) このゲームが引き分けとなるのは,「白赤白赤白赤白赤白」の順に玉が取り出されるときである。赤玉4個のみの取り出す順序は 4! 通り,白玉5個のみの取り出す順序は 5! 通りあるから,求める確率は,

$$\frac{4! \times 5!}{9!} = \underline{\frac{1}{126}} \quad \cdots\cdots【答】$$

(2) このゲームにAが勝つような玉の取り出し方と,それが生じる確率は,次の通りである:

- 「赤」 $\cdots \dfrac{4}{9}$,
- 「白赤赤」 $\cdots \dfrac{{}_4P_2 \times {}_5P_1}{{}_9P_3} = \dfrac{5}{42}$,
- 「白赤白赤赤」 $\cdots \dfrac{{}_4P_3 \times {}_5P_2}{{}_9P_5} = \dfrac{2}{63}$
- 「白赤白赤白赤赤」 $\cdots \dfrac{{}_4P_4 \times {}_5P_3}{{}_9P_7} = \dfrac{1}{126}$

したがって,求める確率は,

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{42} + \frac{2}{63} + \frac{1}{126} = \underline{\frac{38}{63}} \quad \cdots\cdots【答】$$

**2** （ここには 2 の解答を記入すること。）

(1)　$f(x)=0$.

$\sin 3x+\sin x=0$.

$4\sin x-4\sin^3 x=0$.

$4\sin x(1-\sin x)(1+\sin x)=0$.

$\sin x=0, \pm 1$.

よって，これを満たす最小の正の$x$は $\dfrac{\pi}{2}$．……(答)

(2)　(1)の過程より，$f(x)=0$をみたす正の実数$x$は，

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$$

となるので，正の整数 $m$ $(m \geqq 2)$ が

$$\frac{l}{2}\pi \leqq m < \frac{l+1}{2}\pi \quad (lは正の整数)$$

をみたすとき，$p(m)=l$ となる．

この値$l$に対して，

$$\frac{l}{\frac{l+1}{2}\pi} < \frac{p(m)}{m} \leqq \frac{l}{\frac{l}{2}\pi}.$$

$$\left(1-\frac{1}{l+1}\right)\frac{2}{\pi} < \frac{p(m)}{m} \leqq \frac{2}{\pi}$$

が成立する．

$$\lim_{l\to\infty}\left(1-\frac{1}{l+1}\right)\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

であり，$l\to\infty$ のとき，$m\to\infty$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\frac{2}{\pi}. \quad \cdots\cdots(答)$$

**3**　(ここには 3 の解答を記入すること。)

(1)　元の漸化式より、$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+2(n+1)$　$(n=1,2,3,\cdots)$

これより、$\{n(n+1)a_n\}$ は階差数列の一般項が $2(n+1)$ となる数列である.

よって、$n\geqq 2$ のとき、

$$n(n+1)a_n=1\cdot 2\cdot a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+1)=2s+2\cdot\frac{(2+n)(n-1)}{2}=n^2+n+2s-2$$

$n^2+n+2s-2$ で $n=1$ を代入すると $1+1+2s-2=2s$ となり、$1\cdot2\cdot a_1=2s$ と一致する.

したがって、$n=1,2,3,\cdots$ のすべてにおいて、$n(n+1)a_n=n^2+n+2s-2$

$$\therefore\ a_n=1+\frac{2s-2}{n(n+1)}\ \cdots [答]$$

(2)

$a_n=1+(2s-2)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ と変形できるので、自然数 $m$ に対し、

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=m+(2s-2)\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right\}$$

$$=m+(2s-2)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=m+(2s-2)\cdot\frac{m}{m+1}=m\left(1+\frac{2s-2}{m+1}\right)$$

$m>0$ なので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}a_n=0$ となるとき、$\dfrac{2s-2}{m+1}=-1$　　$\therefore\ s=\dfrac{1-m}{2}\ \cdots [答]$

# 4

(ここには4の解答を記入すること。)

$a$は，$(2a+1)^2=\sqrt{5}^2$ すなわち $a^2+a-1=0$ ･･･① を満たす。

(1) $f(x)=x^2-ax+1=0$ は，実数係数で判別式が $a^2-4<0$ ゆえ互いに共役な虚数解 $\alpha, \overline{\alpha}$ をもち，$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ である。

$F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ とおくと，

$$F(\alpha)=\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)=\alpha^2\left\{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1\right\}$$

$$=\alpha^2(a^2+a-1)=0 \quad \left(\because ①, \text{また}, \alpha^2-a\alpha+1=0 \Leftrightarrow a=\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$

同様に $F(\overline{\alpha})=0$ が成り立ち，因数定理から，$F(x)$ は，$f(x)$ で割り切れる　　[証明おわり]

(2) 改めて虚部正の解を $\alpha$ として，解と係数の関係により，

$$\alpha+\overline{\alpha}=2\mathrm{Re}(\alpha)=a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1 \quad \therefore |\alpha|=1$$

$\alpha$ の偏角を $\theta$ とすれば $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1.2\cdots}{4}<\frac{1}{2}$ ゆえ $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ にとれて

$$\alpha^5-1=(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)(\alpha-1)=0$$

$$\therefore \alpha^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta=1$$

$\frac{5}{3}\pi<5\theta<\frac{5}{2}\pi$ より $5\theta=2\pi$ で，$\alpha$ の極形式表示は，

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5} \quad \cdots [\text{答}]$$

(3) $\alpha\overline{\alpha}=1$ より $\alpha^{-1}=\overline{\alpha}$ であり，$\alpha^5=\alpha^{-5}=1$ に注意して

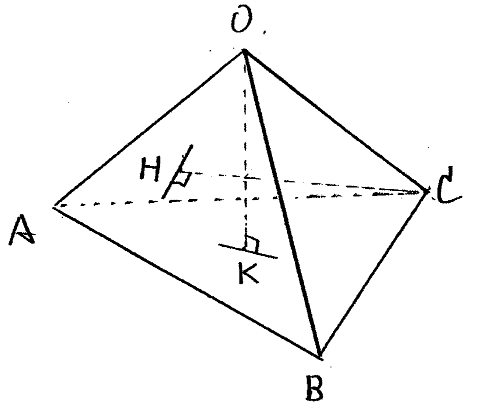
$$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}=\alpha^3+\alpha^{-3}=\alpha^{-2}+\alpha^2$$

$$=(\alpha+\alpha^{-1})^2-2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \quad \cdots [\text{答}]$$

※医学科、保健学科-放射線技術科学・検査技術科学

**5**　(ここには 5 の解答を記入すること。)




(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$ ……[答]

$\vec{OC}\perp\vec{AB}$ より $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\Longleftrightarrow \vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ ……[答]

(2) $\vec{OH}=k\vec{a}+l\vec{b}$ ($k$、$l$ は実数) とすると

$\vec{CH}\perp\vec{OA}$ より

$(k\vec{a}+l\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$\Longleftrightarrow 4k+3l-3=0$ ――①

$\vec{CH}\perp\vec{OB}$ より

$(k\vec{a}+l\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$\Longleftrightarrow k+3l-1=0$ ――②

①②より $k=\frac{2}{3}$、$l=\frac{1}{9}$　$\therefore \vec{OH}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}$ ……[答]

(3)
$\vec{OK}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ ($s$, $t$, $u$ は実数、$s+t+u=1$ ――③) とすると

$\vec{OK}\perp\vec{AB}$ より $(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\Longleftrightarrow s=6t$ ――④

$\vec{OK}\perp\vec{AC}$ より $(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$\Longleftrightarrow s=3u$ ――⑤

③④⑤より $s=\frac{2}{3}$、$t=\frac{1}{9}$、$u=\frac{2}{9}$

よって $\vec{HK}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}\right)=\frac{2}{9}\vec{c}$ より

$\vec{HK}\parallel\vec{c}$　[証明終]

(※) 点H、点Kは△OAB、△ABCの垂心である

※医学科、保健学科-放射線技術科学・検査技術科学

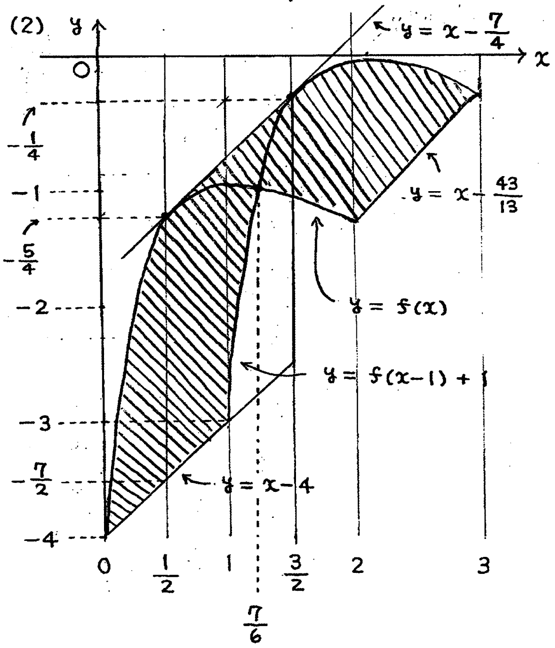
**6** (ここには6の解答を記入すること。)

(1) $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{24}{(6x+1)^2}$ .

$x>0$ のもとで $f'(x)=1$ を解くと $x=\dfrac{1}{2}$ だから，求めるものは曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$ における接線であり，その方程式は

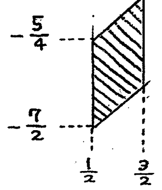
$$y = x - \frac{7}{4}. \quad \cdots [答]$$

(2)

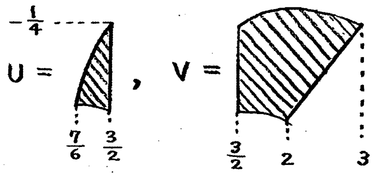



Sの概形は上図の斜線部分．

まず，領域「$x-4 \leqq y \leqq f(x)$ かつ $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$」の部分の図形を $x$ 軸方向に1，$y$ 軸方向に1だけ平行移動することで，次図の平行四辺形をつくる．




これの面積をTとすれば，$T = \dfrac{9}{4}$ .




また，図形の面積U，Vを上図で定めると，

$$U = \int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}} \{f(x-1)+1-f(x)\}\,dx$$

$$= \int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{6x+1} - \frac{4}{6x-5} + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\log(6x+1) - \frac{2}{3}\log(6x-5) + \frac{3}{2}x\right]_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log\frac{5}{8}.$$

$$V = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \{f(x-1)+1-f(x)\}\,dx + \int_{2}^{3} \left\{f(x-1)+1-\left(x-\frac{43}{13}\right)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\log(6x+1) - \frac{2}{3}\log(6x-5) + \frac{3}{2}x\right]_{\frac{3}{2}}^{2} + \left[-\frac{2}{3}\log(6x-5) - \frac{3}{4}x^2 + \frac{125}{26}x\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\log\frac{26}{35}\right) + \left(\frac{55}{52} + \frac{2}{3}\log\frac{7}{13}\right)$$

$$= \frac{47}{26} + \frac{2}{3}\log\frac{2}{5}.$$

求める面積Sは，

$$S = T+U+V$$

$$= \frac{237}{52} - \frac{4}{3}\log 2. \quad \cdots [答]$$